ДИСКРЕТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВВП АЗЕРБАЙДЖАНА

Э.Р. Шафизаде [1], А.Б. Рамазанов [1]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: elnure_sh@mail.ru, ram-bsu@mail.ru

Резюме. В работе в первом этапе была построена динамическая модель ВВП в зависимости от инвестиций и была проверена ее адекватность на основе статистических данных. В следующем этапе была предложена модель оптимальной траектории для достижения ВВП желаемого уровня. В этой модели инвестиция является управления.

Ключевые слова: макроэкономика, внутри валовой продукт, инвестиции, динамическая модель, модель оптимальной траектории ВВП, устойчивость, алгоритм.

AMS Subject Classification: 62P20, 91B02, 74P10.

1. Введение

Основным критерием и источником экономического развития является экономический рост. Экономический рост является устойчивой тенденцией роста основных показателей национального производства (ВВП, ВНД). При этом имеется в виду и абсолютное значение и рост на душу населения.

В экономической теории и статистике используются различные индикаторы для измерения объема национального производства. Наиболее важным из них является внутренний валовый продукт (ВВП)[4,6].

ВВП является выражением в денежной единице конечных продуктов и услуг производимых в экономике. При этом имеется в виду конечные продукты и услуги, производимые в границах конкретной страны.

Для вычисления ВВП используются три основных метода:

- метод добавленной стоимости (метод производства). Этим методом ВВП определяется как сумма добавленных стоимостей на себестоимость, заработную плату и доход образующиеся в производственном процессе и характеризующиеся фактическую долю в конечном продукте в данном предприятии по всем отраслям и типам производства.
- По расходам. Этим методом объем ВВП вычисляется как сумма всех расходов в обществе (потребительские расходы населения, инвестиции производителей, затраты государства на товары и услуги), чистый экспорт (сальдо импорт и экспорта страны);
- Расчет ВВП по доходам - общая сумма всех доходов в обществе (за исключением заработной платы работников, работающих в государственном бюджете, поскольку их заработная плата

выплачивается из государственного бюджета), доходы от собственности, доходы, проценты по капиталу, амортизационные отчисления, арендные платежи.

Факторами экономического роста являются показатели, процессы являющиеся основой для реального роста объема и масштабов производства.

Существуют объективные и субъективные факторы экономического роста. Объективными факторами являются факторы, которые прямо и окончательно влияют на темпы экономического роста. Субъективными факторами являются косвенные факторы, влияющие на масштабы и темпы экономического роста.

Объективными факторами экономического роста являются следующие:

- увеличение объема и качества основного капитала;
- изменение технологий производства;
- увеличение объема экономических ресурсов;
- увеличение предпринимательской активности населения;
- увеличение количества и качества трудовых ресурсов;
- Активизация потребностей населения, позволяющая увеличить объемы производства.

Субъективными факторами экономического роста являются следующие:

- расширение кредитной системы. Так как, активация этой системы позволяет населению потреблять как можно больше. Это, в свою очередь, стимулирует производство.
- Сокращение монополии на рынках продукции и услуг. Это, в свою очередь, активизирует предпринимательскую деятельность;
- Снижение стоимости производственных ресурсов. Этот процесс увеличивает объем производства и цены. Этим способом объем спроса растет.
- Сокращение налогов. Сокращение налогов приводит к увеличению общей экономической активности.

На современном этапе экономического развития экономический рост влияет на следующие факторы:

- Природные ресурсы напрямую влияют на экономический рост.Значение этих ресурсов растет с каждым днем.Так как, ресурсы ресурсов ограничены;
- Рост численности населения, увеличение трудовых ресурсов;
- увеличение капитала внутри границ страны. Увеличение капитала создает возможности для увеличения объемов производства и масштаба, проведения новых научно-технических исследований и инвестиций в человеческие ресурсы;

- научно-технического прогресса, который является основой экономического роста.Так как, научно-технический прогресс способствует переходу от качества экономического развития к новому уровню.

Взаимосвязь факторов экономического роста в рамках национальной экономики осложняется. В такой ситуации главной целью государства является эффективное использование существующих экономических факторов для содействия экономическому росту в интересах всего населения [14].

Как упоминалось выше, одним из показателей экономического роста страны является валовой внутренний продукт (ВВП), и одним из факторов экономического роста является капитал. В этой работе мы построим динамическую модель, демонстрирующую зависимость ВВП от инвестиций в экономику страны.

2. Динамическая модель ВВП

Объем ВВП в i-ом обозначим через x_i, а объем инвестиции в экномику страны через u_i. Допустим, $(i+1)$ -ом году на объем ВВП (x_{i+1}) влияет x_i и u_i. Предположим эта зависимость линейная. Начальное значение ВВП и инвестиции обозначим как x_0 и u_0 соответственно. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{i+1} = Fx_i + Gu_i + v, i = & (1) \\ x(0) = x_0, & (2) \\ u(0) = u_0 & (3) \end{cases}$$

Здесь F и G коэффициенты (параметры линейной зависимости), v постаянная включающая в себя все те влияния которые не предусметрены в этой зависимости.

Цель этой задачи заключается в нахождении таких значений F и G, которые максимально приблизят модельные значения ВВП $(\tilde{x}_i)$ к их статистическим значениям (x_i). То есть, разница $|\tilde{x}_i - x_i|$ максимально приблизилась к нулю. Для этого применяем метод наименьших квадратов. Минимизируем следующий функционал:

$$J = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i - x_i)^2 \to \min \qquad (4)$$

Учитывая (1) в (4), получим следующее:

$$J = \sum_{i=1}^{n} (Fx_{i-1} + Gu_{i-1} + v - x_i)^2 \to \min \qquad (5)$$

Следует отметить, что для решения задачи (4)-(5) можно также применить дискретный аналог градиентного алгоритма [12]. Для опрeления значений F, G и v минимизирующие (5), мы должны получить производное первого порядка по F, G и v и приравнивать к нулю. То есть:

$$J'_F = 0 \tag{6}$$

$$J'_G = 0 \tag{7}$$

$$J'_v = 0 \tag{8}$$

Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(Fx_{i-1} + Gu_{i-1} + v - x_i) = 0 & (9) \\ \sum_{i=1}^{n} u_{i-1}(Fx_{i-1} + Gu_{i-1} + v - x_i) = 0 & (10) \\ \sum_{i=1}^{n} (Fx_{i-1} + Gu_{i-1} + v - x_i) = 0 & (11) \end{cases}$$

Из системы уравнений (9)-(11) для F, G и v получим следующие выражения:

$$\begin{cases} F = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_{i-1})^2} - \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_{i-1})^2} - \\ -G\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i-1}x_{i-1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\sum_{i=1}^{n} u_{i-1}\right)}{\sum_{i=1}^{n} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_{i-1})^2} & (12) \\ G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i u_{i-1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} u_{i-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} {u_{i-1}}^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} u_{i-1})^2\right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i-1}x_{i-1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\sum_{i=1}^{n} u_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_{i-1})^2}} - \\ - \dfrac{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i-1}x_{i-1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\sum_{i=1}^{n} u_{i-1}\right)}{\sum_{i=1}^{n} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_{i-1})^2}}{\left(\sum_{i=1}^{n} {u_{i-1}}^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} u_{i-1})^2\right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i-1}x_{i-1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\sum_{i=1}^{n} u_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_{i-1})^2}} & (13) \\ v = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - F\sum_{i=1}^{n} x_{i-1} - G\sum_{i=1}^{n} u_{i-1}\right) & (14) \end{cases}$$

Рассмотрим статистические значения объема ВВП и инвестиции на промышленность Азербайджана 2005-2016 годах (таблица 1).

Таблица 1. Объем ВВП и инвестиции на промышленность

Азербайджана 2005-2016 годах, млн. манат

годы	ВВП, млн. манат	Инвестиции на промышленность, млн. манат
2005	12522.5	4,176
2006	18746.2	4,297
2007	28360.5	4,591
2008	40137.2	4,249
2009	35601.5	3,225
2010	42465,0	4 276
2011	52082,0	5,370
2012	54743.7	6,040
2013	58182,0	7,500
2014	59014,1	7,640
2015	54380.0	8,500
2016	60393.6	9,950

На основе этих данных коэффициент корреляции R=0.75. Это означает что, объем инвестиции значительно влияет на объем ВВП.

Исходя из этого, мы можем рассмотреть динамическую модель показывающую зависимость ВВП от инвестиции. Тогда задача (1)-(3) будет в следующем виде:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{i+1} = Fx_i + Gu_i + v, i = \overline{0,11} & (15) \\ x(0) = x_{2005}, & (16) \\ u(0) = u_{2005} & (17) \end{cases}$$

На основе таблицы 1 $x_{2005} = \mathbf{4176}\,\text{млн. ман.}$**,** $u_{2005} = 12522.5\text{млн. ман.}$ На основе (12)-(14) значения параметров F, G и v будут вычисляться следующими выражениями:

$$\begin{cases} F = \dfrac{\sum_{i=1}^{11} x_i x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{11} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{11}(\sum_{i=1}^{11} x_{i-1})^2} - \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11} x_i \sum_{i=1}^{11} x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{11} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{11}(\sum_{i=1}^{11} x_{i-1})^2} - \\ -\dfrac{G\left(\sum_{i=1}^{11} u_{i-1}x_{i-1} - \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_{i-1}\sum_{i=1}^{11} u_{i-1}\right)}{\sum_{i=1}^{11} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{11}(\sum_{i=1}^{11} x_{i-1})^2} & (18) \\ G = \dfrac{\sum_{i=1}^{11} x_i u_{i-1}}{\left(\sum_{i=1}^{11} {u_{i-1}}^2 - \frac{1}{11}(\sum_{i=1}^{11} u_{i-1})^2\right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{11} u_{i-1}x_{i-1} - \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_{i-1}\sum_{i=1}^{11} u_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{11} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{11}(\sum_{i=1}^{11} x_{i-1})^2}} - \\ -\dfrac{\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_i \sum_{i=1}^{11} u_{i-1}}{\left(\sum_{i=1}^{11} {u_{i-1}}^2 - \frac{1}{11}(\sum_{i=1}^{11} u_{i-1})^2\right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{11} u_{i-1}x_{i-1} - \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_{i-1}\sum_{i=1}^{11} u_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{11} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{11}(\sum_{i=1}^{11} x_{i-1})^2}} - \\ -\dfrac{\frac{\left(\sum_{i=1}^{11} x_i x_{i-1} - \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_i \sum_{i=1}^{11} x_{i-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{11} u_{i-1}x_{i-1} - \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_{i-1}\sum_{i=1}^{11} u_{i-1}\right)}{\sum_{i=1}^{11} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{11}(\sum_{i=1}^{11} x_{i-1})^2}}{\left(\sum_{i=1}^{11} {u_{i-1}}^2 - \frac{1}{11}(\sum_{i=1}^{11} u_{i-1})^2\right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{11} u_{i-1}x_{i-1} - \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_{i-1}\sum_{i=1}^{11} u_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{11} {x_{i-1}}^2 - \frac{1}{11}(\sum_{i=1}^{11} x_{i-1})^2}} & (19) \\ v = \dfrac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{11} x_i - F\sum_{i=1}^{11} x_{i-1} - G\sum_{i=1}^{11} u_{i-1}\right) & (20) \end{cases}$$

На основе этих данных формулы (15)-(16) были переработаны в пакете программ MATLAB и получены следующие результаты:
G=0.0764
F=0.8044
v =1.2047e+004
Тогда модель будет в следующем виде:

$$\tilde{x}_{i+1} = 0.8044x_i + 0.0764u_i + 12047 \quad (21)$$

Сравнение модельных и статистических значений объема ВВП дано в таблице 2.

Таблица 2. Модельные и статистические значения объема ВВП Азербайджана в 2005-2016 гг.

годы	Статистические значения объема ВВП, млн. ман.	Модельные значения объема ВВП, млн. ман.
2005	12522.5	12523
2006	18746.2	22440

2007	28360.5	27456
2008	40137.2	35212
2009	35601.5	44660
2010	42465,0	40933
2011	52082,0	46534
2012	54743.7	54354
2013	58182,0	56546
2014	59014,1	59424
2015	54380.0	60104
2016	60393.6	56442

Визуальное сравнение модельных и статистических значений объема ВВП дано в рисунке 1.

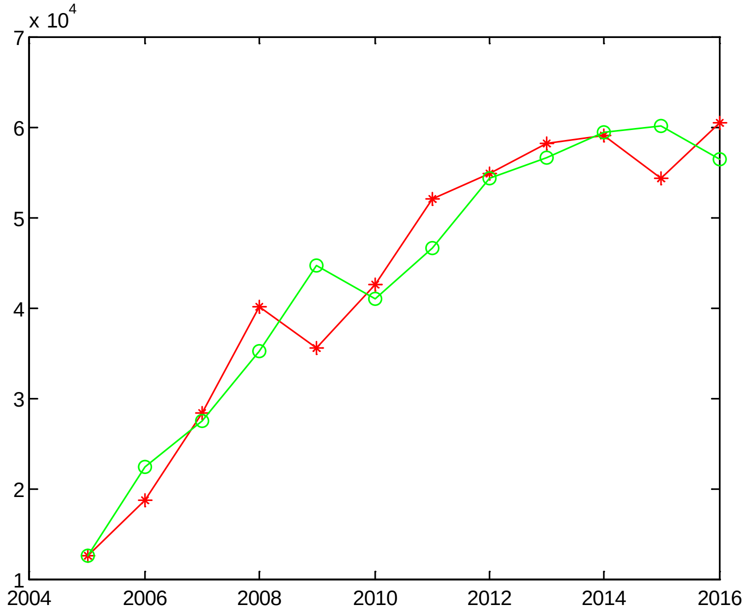

Рисунок 1. Сравнение модельных (зеленая линия) и статистических значений (красная линия) объема ВВП

3. Модель оптимальной траектории для достижения ВВП желаемого уровня

Рассмотрим следующую задачу: сколько инвестиций должно быть выделено в некоторый год для достижения желаемого уровня ВВП через определенный промежуток времени.

Для этого рассмотрим следующую задачу:

$$J = \sum_{i=0}^{N} \left(x_{jel} - x_i\right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} u_i^2 \to \min \qquad (22)$$

$$x_{i+1} = Fx_i + Gu_i + v, i = \overline{0, n-1} \qquad (23)$$

$$x(0) = x_0 \qquad (24)$$

Здесь u_i-объем инвестиции, x_i- объем ВВП в i-ом году. Поскольку мы хотим достичь желаемого уровня в конце траектории, можно (22) написать следующим образом:

$$J = \left(x_{jel} - x_N\right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \left(x_i^2 + u_i^2\right) \to \min \qquad (25)$$

Эту задачу напишем в следующем виде:

$$J = \frac{1}{2} q \left(x_{jel} - x_N\right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \left(k_1 x_i^2 + k_2 u_i^2\right) \to \min \qquad (26)$$

$$x_{i+1} = Fx_i + Gu_i + v, i = \overline{0, n-1} \qquad (27)$$

$$x(0) = x_0 \qquad (28)$$

k_1, k_2 коэффициенты, x_{jel}- желаемый уровень ВВП, N-число годов. Для этого построим расширенный критерий качества $\bar{J}$ [8]. Для этого в фукционал J добавляем системы уравнений с коэффициентами $\lambda(i)[1,7]$:

$$\bar{J} = \frac{1}{2} q \left(x_{jel} - x_N\right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2}\left(k_1 x_i^2 + k_2 u_i^2\right) + \lambda_{i+1}(Fx_i + Gu_i + v - x_{i+1})\right] \qquad (29)$$

Вводим следующие обозначения:

$$\phi\left(x(N)\right) = \frac{1}{2} q \left(x_{jel} - x_N\right)^2$$

$$H^i = \frac{1}{2}\left(k_1 x_i^2 + k_2 u_i^2\right) + \lambda_{i+1}(Fx_i + Gu_i + v)$$

(29) можем написать в следующем виде:

$$\bar{J} = \frac{1}{2}q\left(x_{jel} - x_N\right)^2 - \lambda_N x_N + \sum_{i=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2}\left(k_1 x_i^2 + k_2 u_i^2\right) + \lambda_{i+1}(Fx_i + Gu_i + v) - \lambda_i x_i\right] + H^0 \to \min \tag{30}$$

Тогда получим следующую задачу:

$$\bar{J} = \frac{1}{2}q\left(x_{jel} - x_N\right)^2 - \lambda_N x_N + \sum_{i=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2}\left(k_1 x_i^2 + k_2 u_i^2\right) + \lambda_{i+1}(Fx_i + Gu_i + v) - \lambda_i x_i\right] + H^0 \to \min \tag{31}$$

$$x_{i+1} = Fx_i + Gu_i + v, i = \overline{0, n-1} \tag{32}$$

$$x(0) = x_0 \tag{33}$$

Решая задачу (31)-(33), т.е. для нахождения значений $\lambda_i, (\ i = \overline{0, n+1})$, $u_i, (\ i = \overline{0, n-1})$ и $x_i, (\ i = \overline{0, n})$ мы должны решать следующую систему уравнений [3]:

$$\frac{\partial H^i}{\partial x_i} = \lambda_i \tag{34}$$

$$\frac{\partial H^i}{\partial u_i} = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_N} = \lambda_N \tag{36}$$

Отсюда получаем:

$$\lambda_i = k_1 x_i + \lambda_{i+1} F \tag{37}$$

$$0 = k_2 u_i + \lambda_{i+1} G \tag{38}$$

$$\lambda_N = q\left(x_N - x_{jel}\right) \tag{39}$$

Из (38) получим:

$$u_i = -\lambda_{i+1} G k_2^{-1} \tag{40}$$

Учитывая (40) в (32) получим,

$$x_{i+1} = Fx_i - G^2 k_2^{-1} \lambda_{i+1} + v, i = \overline{0, n-1}$$

В (37) делаем следующее преобразование:

$$F\lambda_{i+1} = -k_1 x_i + \lambda_i$$

На основе этих преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{i+1} = Fx_i - G^2 k_2^{-1}\lambda_{i+1} + v, i = \overline{0, n-1} & (41) \\ F\lambda_{i+1} = -k_1 x_i + \lambda_i & (42) \end{cases}$$

Отсюда получим

$$\begin{cases} x_{i+1} + G^2 k_2^{-1}\lambda_{i+1} = Fx_i + v, i = \overline{0, n-1} \\ F\lambda_{i+1} = -k_1 x_i + \lambda_i \end{cases}$$

Последнюю систему напишем в виде матриц:

$$\begin{bmatrix} E & G^2 k_2^{-1} \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \lambda_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ -k_1 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим x_{i+1}иλ_{i+1}:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \lambda_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & G^2 k_2^{-1} \\ 0 & F \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F & 0 \\ -k_1 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E & G^2 k_2^{-1} \\ 0 & F \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Из (43) получим:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \lambda_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F + G^2 k_1 k_2^{-1} F^{-1} & -G^2 k_2^{-1} F^{-1} \\ -k_1 F^{-1} & F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Введем следующее обозначение:

$$A = \begin{bmatrix} F + G^2 k_1 k_2^{-1} F^{-1} & -G^2 k_2^{-1} F^{-1} \\ -k_1 F^{-1} & F^{-1} \end{bmatrix}$$

Тогда (44) можно написать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \lambda_{i+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Тогда:

$$\begin{bmatrix} x_{i+2} \\ \lambda_{i+2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \lambda_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{i+3} \\ \lambda_{i+3} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{i+2} \\ \lambda_{i+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} = A^3 \begin{bmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{bmatrix} + (A^2 + A + A^0) \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$$

и т.д. Отсюда можем написать:

$$\begin{bmatrix} x_{i+k} \\ \lambda_{i+k} \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{bmatrix} + \left(A^{k-1} + A^{k-2} + \cdots + A + A^0\right) \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Тогда, (46) можно написать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_N \end{bmatrix} = A^N \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} + (A^{N-1} + A^{N-2} + \cdots + A + A^0) \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Введем следующее обозначение:

$$A^N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = (A^{N-1} + A^{N-2} + \cdots + A + A^0) \quad (48)$$

Тогда, (47) можно написать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} x_N = a_{11}x_0 + a_{12}\lambda_0 + f_1 \\ \lambda_N = a_{21}x_0 + a_{22}\lambda_0 + f_2 \end{cases}$$

Если сюда добавим условие (39), то получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_N = a_{11}x_0 + a_{12}\lambda_0 + f_1 & (50) \\ \lambda_N = a_{21}x_0 + a_{22}\lambda_0 + f_2 & (51) \\ \lambda_N = q(x_N - x_{jel}) & (52) \end{cases}$$

Значения f_1 и f_2 получим из (48). Учитывая (50) и (51) в (52) получим:

$$\lambda_0 = (qa_{12} - a_{22})^{-1}\left(x_{jel}q - (qa_{11} - a_{21}) - (qf_1 - f_2)\right) \quad (53)$$

x_0 нам дано как начальное уловие, а λ_0 –можем найти из (53). После этого значенияλ_i,$(i = \overline{0, n+1})$, u_i,$(i = \overline{0, n-1})$иx_i,$(i = \overline{0, n})$можем найти. Значенияλ_i,$(i = \overline{0, n+1})$иx_i,$(i = \overline{0, n})$можем найти из выражения (44), u_i,$(i = \overline{0, n-1})$из (40).

Этот подход был применен для Азербайджана на основе статистических данных (таблица1). На основе этих данных $x_0 = 12522.5$. Задача (26)-(28) была переработана в пакете программ MATLAB с коэффициентами k1=0, k2=4.5, q=1000000 и получены следующие результаты (таблица3):

Таблица 3.

	x_i=1.0e+004, *, млн. ман.	Модельные значения ВВП, млн. ман.	λ_i =1.0e+006 *	u_i =1.0e+004 *	Инвестиции в промышленность, млн. ман.
2005	1.2523	12522.5	-0.122	0.2841	4176.00
2006	2.2925	22440.13	-0.1672	0.4016	4297.00
2007	3.1632	27455.89	-0.2364	0.566	4591.00
2008	3.9105	35212.37	-0.3332	0.7862	4249.00
2009	4.5735	44659.72	-0.4628	1.0739	3225.00
2010	5.1874	40932.81	-0.6322	1.4445	4276.00
2011	5.7847	46534.33	-0.8504	1.9178	5370.00
2012	6.397	54354.13	-1.129	2.5191	6040.00
2013	7.0568	56546.49	-1.4831	3.2806	7500.00
2014	7.7992	59423.95	-1.9314	4.2429	7640.00

2015	8.6637	60104.01	-2.4979	5.4574	8500.00
2016	9.6964	56441.95	-3.2128	0	9950.00

Визуальное сравнение модельных значений ВВП и значений ВВП для достижения желаемого уровня дано на рисунке 2.

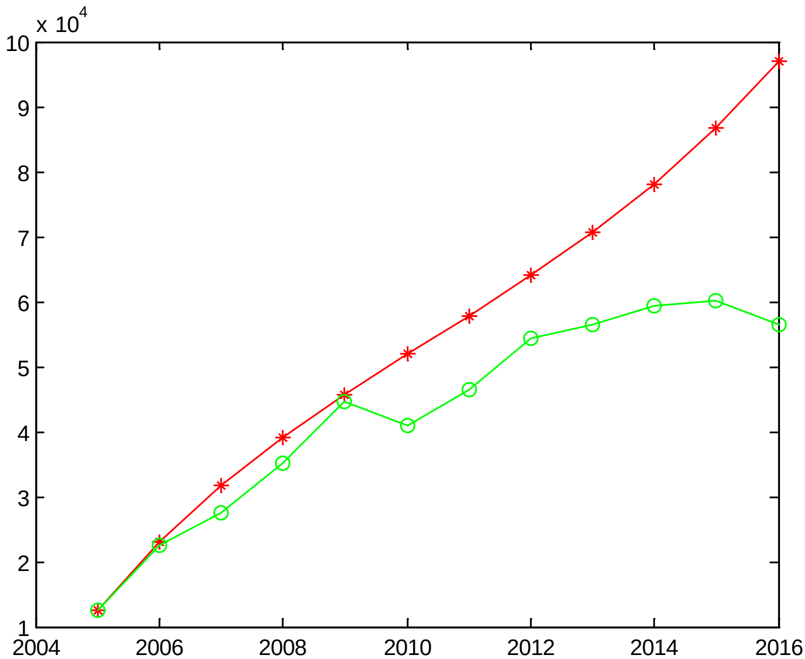

Рисунок 2. Сравнение модельных значений ВВП (зеленная линия) и значений ВВП для достижения желаемого уровня (красная линия).

4. Заключение

Этот подход дает возможность стратегического планирования ВВП в целях страны. В этой работе для достижения желаемого уровня ВВП в динамическую модель включен объем инвестиции как управление. Но как указана выше, на объем ВВП влияет много других факторов. Мы из них выбрали одну: объем инвестиции. Но даже при этом динамическую модель оптимальной траектории ВВП дал хорошие результаты (см.табл.3, рис.2).

В дальнейших исследованиях будут учитываться другие наиболее влияющие факторы на ВВП. В этом случае динамическая модель оптимальной траектории ВВП даст более адекватные результаты. Многие параметры входящие модель имеет приближенный характер. Поэтому в дальнейшем работу можно развивать при колебаниях параметров. Другими словами, исследование устойчивости относительно изменение погрешности (см., например, [12]). Другой направление исследование возможно применение методов распознавание образов с заранее заданными пороговыми числами. В этом случае получается задача классификации (см., например, [13]).

Список литературы

1. Aliev F.A., Larin V.B.,Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach Sci, 1998.
2. Алиев Ф.А., Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем, Баку, 1989
3. Алиев Ф.А., Шафизаде Э.Р., Шихлинская Р.Ю., Муртузалиев Т.Ф. Экономико-математическая модель максимизации прибыли для Интернет магазина, «Актуальные проблемы экономики», ISSN 1993 – 6788, 3(141), 2013, 210-219 стр.
4. Алиев Ф.А., Нифтиев А.А., Шафизаде Э.Р., Шихлинская Р.Ю., Экономико-математическая модель в виртуальном бизнесе с применением нечеткого аппарата, Десятая Международная Азиатская Школа-Семинар «Проблемы оптимизации сложных систем», Кыргызская Республика, Иссык-Кульская область, санаторий «Иссык-Куль Аврора», 25 июля-5 августа 2014, стр. 33-39
5. Алиев Ф.А., Нифтиев А.А, Шихлинская Р.Ю., Шафизаде Э.Р., Муртузалиев Т.Ф., Нечеткая модель электронной торговли, Proceedings of Inatitute of Applied Mathematics, V3, N1, 2014, pp.23-31
6. Aliev F.A., Shafizadeh E.R., Hasanova G.R., Zeynalov J., Fuzzy model and algorithm for solving of e-shop income maximization, The 5-th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, 27-29 August, 2015, Baku, Azerbaijan, pp.179-185.
7. Брайсон А., Хо Ю-ши, Прикладная теория оптимального управления, Москва, 1972.
8. Голиченко О.Г., Экономическое развитие в условиях несовершенной конкуренции: Подходы к многоуровневому моделированию, М.: Наука, 1999.
9. Гурман В.И., Основы макроэкономического анализа, Тверь: Тверской гос. ун-т, 1995.
10. Ramazanov A.B. On stability of the gradient algorithm in convex discrete optimisation problems and related questions // Discrete Mathematics and Applications, 2011, volume 21, Issue 4, Pages 465-476.
11. Рамазанов А.Б., Мамедова Е.В. Применение градиентного алгоритма в некоторых задачах распознавания образов // Proceedings of IAM , 2017, V. 5, N 2, pp. 217-224.

12. Занг В.Б., Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / Пер. с англ. Н.В. Островского под ред. В.В. Лебедева и В.Н. Разжевайкина / В.-Б. Занг. – М.: Мир, 1999.

DISCRETE DINAMIC MODEL OF GDP IN AZERBAIJAN

E.R. Shafizade [1], A.B. Ramazanov [1]

[1]Institute of Applied Mathematics,BSU, Baku, Azerbaijan
e-mail: elnure_sh@mail.ru, ram-bsu@mail.ru

Abstract. In this work, was created a dynamic model that demonstrates the dependence of GDP on investments. It was tested model's adequate on the base of statistics datas. Then was created model of optimal trajectory to achieve the desired level of GDP. In this model investment is controlling parameter.

REFERENCES

1. Aliev F.A., Larin V.B.,Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach Sci, 1998.
2. Aliyev F.A., Metody resheniya prikladnykh zadach optimizachii dinamicheskikh sistem, Baku, 1989 (Aliev F.A., Solution methods of optimization dynamic systems applied problems, Baku, 1989) (in Russian)
3. Aliyev F.A., Shafizade E.R. Shikhlinskaya R.Y., Murtuzaliyev T.F., Ekonomiko-matematicheskaya model maksimizachii pribyli Internet magazina, Aktualnye problemy ekonomiki, ISSN 1993 – 6788, 3(141), 2013, str.210-219 (Aliev F.A., Shafizade E.R. Shikhlinskaya R.Y., Murtuzaliev T.F.,Economic-Mathematical model of maximization revenue of e-store, Actual problems of Economics, ISSN 1993 – 6788, 3(141), 2013, pp.210-219)(in Russian)
4. Aliyev F.A., Niftiyev A.A., Shafizade E.R. Shikhlinskaya R.Y., Murtuzaliyev T.F., Ekonomiko-matematicheskaya model v virtualnom biznese s primeneniyem nechetkogo apparata, Desyataya Mejdunarodnaya Aziatskaya Shkola-Seminar "Problemy optimizachii slojnykh sistem", Kyrgyziskaya Respublika, 2014, str. 33-39 (Aliev F.A., Niftiev A.A., Shafizade E.R. Shikhlinskaya R.Y., Murtuzaliev T.F., Economic-Mathematical model in virtual business with fuzzy apparatus, 10-th International Asian School-Seminar "Optimization problems of difficult sistems", Kyrgyz Republic, 2014, pp. 33-39) (in Russian)
5. Aliyev F.A., Niftiyev A.A., Shikhlinskaya R.Y., Shafizade E.R., Murtuzaliyev T.F., Nechetkaya model elektronnoy torqovli, Proceedings

of Inatitute of Applied Mathematics, V3, N1, 2014, pp.23-31 (Aliev F.A., Niftiev A.A., Shafizade E.R. Shikhlinskaya R.Y., Murtuzaliev T.F., Fuzzy model of e-trade, Proceedings of Inatitute of Applied Mathematics, V3, N1, 2014, pp.23-31) (in Russian)

6. Aliev F.A., Shafizadeh E.R., Hasanova G.R., Zeynalov J., Fuzzy model and algorithm for solving of e-shop income maximization, The 5-th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, 27-29 August, 2015, Baku, Azerbaijan, pp.179-185.
7. Brayson A., Kho Yu-Shi, Prikladnaya teoriya optimalnogo upravleniya, Moskva, 1972 (Bryson A., Ho Yu-Chi, Applied Optimal Control, Moscow, 1972) (in Russian)
8. Golichenko O.G., Ekonomicheskoye razvitiye v usloviyakh nesovershennoy konkurenchii: Podkhody k mnogourovnevomu modelirovaniyu, M:Nauka, 1999 (Golichenko O.G., Economic development under imperfect competition. Approximitation to multilevel modeling, M:Nauka, 1999) (in Russian)
9. Gurman V.I., Osnovy makroekonomicheskogo analiza, Tver, 1995 (Gurman V.I., Basics of macroeconomic analyze, Tver, 1995)
10. Ramazanov A.B. On stability of the gradient algorithm in convex discrete optimisation problems and related questions // Discrete Mathematics and Applications, 2011, volume 21, Issue 4, Pages 465-476.
11. Ramazanov A.B., Mamedova E.V., Primeneniye qradiyentnogo algoritma v nekotorykh zadachakh raspoznovaniya obrazov, Proceedings of IAM , 2017, V. 5, N 2, pp. 217-224. (Ramazanov A.B., Mamedova E.V., Application of gradient algorithm in some problems of images recognition, Proceedings of IAM , 2017, V. 5, N 2, pp. 217-224.) (in Russian)
12. Zang V.B., Sinergeticheskaya ekonomika. Vremya i peremeny v nelineynoy ekonomicheskoy teorii, M: Mir, 1999 (Zang V.B., Synergetic economics. Time and changes in nonlinear economical theory, M: Mir, 1999) (in Russian)